УДК 512.554.3+512.552.8

О максимальности некоторых коммутативных подалгебр янгианов*

 А. И. Ильин

DOI: https://doi.org/10.4213/faa3701

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая комплексная алгебра Ли, G — соответствующая связная односвязная группа Ли, T — максимальный тор, T^{reg} — множество регулярных элементов тора, $\mathfrak{h}$ — соответствующая картановская подалгебра, $n = \operatorname{rk}\mathfrak{g} = \dim\mathfrak{h}$.

Пусть Φ обозначает соответствующую алгебре Ли $\mathfrak{g}$ систему корней, Φ^+ — множество положительных корней, $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ — простые корни, $\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ — фундаментальные веса, $(\cdot\,,\cdot)$ — инвариантное скалярное произведение, такое, что $(\alpha,\alpha)=2$ для коротких простых корней α, $\mathfrak{g}_\alpha$ — соответствующие корневые подпространства алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $x_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$, $x_\alpha^-\in\mathfrak{g}_{-\alpha}$ удовлетворяют условию $(x_\alpha,x_\alpha^-)=1$, $t_{\omega_i}\in\mathfrak{h}$ — элемент, соответствующий ω_i при изоморфизме $\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}^*$. Аналогично h_i — это элемент соответствующий α_i. Положим $d_i=(\alpha_i,\alpha_i)/2$. Определим также

$$\Omega=\sum_{\alpha\in\Phi^+}(x_\alpha^+\otimes x_\alpha^-+x_\alpha^-\otimes x_\alpha^+)+\frac{1}{d_i}\sum_i t_{\omega_i}\otimes h_i\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}.$$

Наконец, пусть $e^\alpha\in\mathbb{C}[T]$ — мономиальная функция, заданная корнем α.

Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ — это ассоциативная алгебра, деформация универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g}[t])$, где $\mathfrak{g}[t]$ — алгебра токов.

Определение. *Янгиан* $Y(\mathfrak{g})$ — это ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{C}$, порожденная элементами $\{x, J(x)\mid x\in\mathfrak{g}\}$ со следующими определяющими соотношениями:

$$xy-yx=[x,y],\qquad J([x,y])=[J(x),y],$$
$$J(cx+dy)=cJ(x)+dJ(y),$$
$$[J(x),[J(y),z]]-[x,[J(y),J(z)]]=\sum_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda}([x,x_\lambda],[[y,x_\mu],[z,x_\nu]])\{x_\lambda,x_\mu,x_\nu\},$$
$$\begin{aligned}&[[J(x),J(y)],[z,J(w)]]+[[J(z),J(w)],[x,J(y)]]\\ &\quad=\sum_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda}\bigl(([x,x_\lambda],[[y,x_\mu],[[z,w],x_\nu]])\\ &\qquad\qquad+([z,x_\lambda],[[w,x_\mu],[[x,y],x_\nu]])\bigr)\{x_\lambda,x_\mu,J(x_\nu)\}\end{aligned}$$

для всех $x,y,z,w\in\mathfrak{g}$ и $c,d\in\mathbb{C}$, где $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — некоторый ортонормированный базис в $\mathfrak{g}$, $\{x_1,x_2,x_3\}=\frac{1}{24}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_3}x_{\pi(1)}x_{\pi(2)}x_{\pi(3)}$ для всех $x_1,x_2,x_3\in Y(\mathfrak{g})$.

---

*Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и финансировалось в рамках господдержки ведущих университетов Российской Федерации «5-100». Теорема 3 и следствие 4 были получены при поддержке гранта РНФ 19-11-00056. Автор является победителем конкурса «Молодая математика России» и благодарит его спонсоров и жюри.

Через

$$\widehat{R}(u) = \mathrm{Id} - \Omega u^{-1} + \sum_{k\geqslant 2} R^{(k)} u^{-k} \in (Y(\mathfrak{g}) \otimes Y(\mathfrak{g}))[[u^{-1}]]$$

обозначим универсальную R-матрицу [1, теорема 3.4]. Пусть V — произвольное нетривиальное конечномерное представление янгиана, ρ — соответствующий гомоморфизм $Y(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V)$. В работе [1] янгиан $Y(\mathfrak{g})$ был задан другими образующими (RTT-образующими) и соотношениями (см. также [7]):

Определение. $Y_V(\mathfrak{g})$ — это ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{C}$ с образующими $t_{ij}^{(r)}$, $1 \leqslant i, j \leqslant \dim V$, $r \geqslant 1$, и определяющими соотношениями

$$R(u-v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R(u-v) \quad \text{в } \mathrm{End}(V)^{\otimes 2} \otimes Y_V(\mathfrak{g})[[u^{-1}, v^{-1}]],$$
$$S^2(T(u)) = T(u + \tfrac{1}{2}c_{\mathfrak{g}}),$$

где $T(u) = (t_{ij}(u))_{i.j=1,\dots \dim V}$, $t_{ij}(u) = \delta_{ij} + \sum_{r\geqslant 1} t_{ij}^{(r)}$, $R(u-v) = (\rho\otimes\rho)\widehat{R}(u-v)$, $S(T(u)) = T(u)^{-1}$, $c_{\mathfrak{g}}$ — значение элемента Казимира алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на присоединенном представлении.

Теорема. [1] *Отображение* $\psi\colon Y_V(\mathfrak{g}) \to Y(\mathfrak{g})$, *такое, что* $T(u) \mapsto (\rho \otimes 1)\widehat{R}(-u)$, *задает изоморфизм между* $Y_V(\mathfrak{g})$ *и* $Y(\mathfrak{g})$.

Далее считаем, что $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V(\omega_i, 0)$ — сумма фундаментальных представлений янгиана, см. например [2]. Известно, что если $V(\omega_i, 0)$ рассматривается как представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то $V(\omega_i, 0) = V_{\omega_i} \oplus \bigoplus_{\mu<\omega_i} V_{\mu}^{\oplus k_{\mu}}$, где $k_{\mu} \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ [2]. Здесь V_{μ} — неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ старшего веса μ и $\mu < \omega_i$ означает, что $\omega_i - \mu$ — сумма положительных корней. Также мы в дальнейшем будем отождествлять $Y_V(\mathfrak{g})$ и $Y(\mathfrak{g})$ посредством изоморфизма ψ из приведенной теоремы.

Пусть $C \in G$ — регулярный элемент. Пусть $\pi_i\colon V \to V(\omega_i, 0)$ — проекция, $T^i(u) = \pi_i T(u) \pi_i$. Рассмотрим ряды

$$\tau_i(u, C) = \mathrm{tr}_{V(\omega_i,0)}\, \rho_i(C) T^i(u), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Коэффициенты рядов $\tau_i(u, C)$ попарно коммутируют и алгебраически независимы [5]. Порожденную ими подалгебру обозначим через $B(C)$. Подалгебры вида $B(C)$ называются подалгебрами Бете. Как показано в работе [5], в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ эти подалгебры совпадают с подалгебрами Бете, определенными в работе [6]. Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *Для любого* $C \in T^{\mathrm{reg}}$ *подалгебра Бете* $B(C)$ *является максимальной коммутативной подалгеброй в* $Y_V(\mathfrak{g})$.

Так как для любых двух представлений W_1, W_2 янгиана коэффициенты рядов $\mathrm{tr}_{W_i}\, \rho(C)(\rho \otimes 1)\widehat{R}(u)$, $i = 1, 2$, попарно коммутируют [5], мы получаем описание подалгебр Бете в $Y(\mathfrak{g})$:

Следствие 2. *Для любого* $C \in T^{\mathrm{reg}}$ *подалгебра Бете* $B(C)$ *в* $Y(\mathfrak{g})$ *порождена элементами*

$$\mathrm{tr}_V\, \rho(C)(\rho \otimes 1)\widehat{R}(u),$$

где (ρ, V) *пробегает все конечномерные представления янгиана* $Y(\mathfrak{g})$.

Доказательство теоремы. Зададим фильтрацию на $Y_V(\mathfrak{g})$: $\deg t_{ij}^{(r)} = r-1$. Зададим градуировку на $U(\mathfrak{g}[t])$: $\deg(x\cdot t^r) = r-1$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Тогда $\operatorname{gr} Y_V(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}[t])$, см. [1]. Наша цель — доказать, что $\operatorname{gr} B(C) = U(\mathfrak{h}[t])$. Отсюда будет следовать требуемое утверждение, так как $U(\mathfrak{h}[t])$ — максимальная коммутативная подалгебра в $U(\mathfrak{g}[t])$, см., например, [3, лемма 1.7.4].

Обозначим через $\tau_i^{(r)}$ коэффициент при u^{-r} ряда $\tau_i(u, C)$, а через $\mathfrak{h}^{(r)}$ и $\mathfrak{g}^{(r)}$ подпространства $\mathfrak{h}\cdot t^r \subset \mathfrak{g}[t]$ и $\mathfrak{g}\cdot t^r \subset \mathfrak{g}[t]$ соответственно. Заметим, что старшая часть коэффициента $\tau_i^{(r)}$ линейна относительно заданной фильтрации, а также инвариантна относительно сопряжения элементом $C \in T^{\mathrm{reg}}$. Отсюда следует, что старшая часть каждого коэффициента $\tau_i^{(r)}$ при u^{-r} ряда $\tau_i(u, C)$ попадает в $\mathfrak{h}^{(r)}$.

Отождествим $\mathfrak{g}^{(r)}$ для каждого $r \geqslant 1$ с касательным пространством в точке C группы G. При этом отождествлении коэффициенты $\tau_i^{(r)}$, $i = 1, \ldots, n$, являются дифференциалами характеров представлений $V(\omega_i, 0)$ как представлений группы Ли G в точке $C \in T^{\mathrm{reg}}$, что следует из задания $U(\mathfrak{g}[t])$ образующими и соотношениями, см. [1, предложение 4.4], и из [1, теорема 6.5]. Но дифференциалы характеров фундаментальных представлений в регулярной точке линейно независимы, см., например, [4]. Принимая во внимание то, что любое неприводимое представление может быть реализовано как старшее подпредставление тензорного произведения фундаментальных представлений, получаем, что дифференциалы характеров представлений $V(\omega_i, 0)$ выражаются через характеры фундаментальных представлений группы G верхнетреугольным образом. Следовательно, $\operatorname{gr} B(C) = U(\mathfrak{h}[t])$. Теорема 1 доказана. □

По аналогии с работой [8] теорему 1 можно уточнить. Зададим другую фильтрацию на $Y_V(\mathfrak{g})$: $\deg t_{ij}^{(r)} = r$. Через $Q(C)$ обозначим квадратичную часть подалгебры $B(C)$, т. е. $B(C) \cap F^2 Y_V(\mathfrak{g})$, где $F^2 Y_V(\mathfrak{g})$ — подпространство элементов степени не выше 2 алгебры $Y_V(\mathfrak{g})$.

Теорема 3. *Пусть $C \in T^{\mathrm{reg}}$. Подалгебра $B(C)$ совпадает с централизатором подпространства $Q(C)$.*

Доказательство. Рассмотрим $\operatorname{gr} Q(C) \subset U(\mathfrak{g}[t])$. Заметим, что $\operatorname{gr} Q(C) \supset \mathfrak{h}^{(2)}$. С другой стороны, централизатор $\mathfrak{h}^{(2)}$ в $U(\mathfrak{g}[t])$ совпадает с $U(\mathfrak{h}[t])$, см. доказательство предложения 2.6 в [5]. □

Пространство $Q(C)$ может быть явно описано.

Предложение 4. *Рассмотрим элементы*

$$\sigma_i(C) = 2J(t_{\omega_i}) - \sum_{\alpha\in\Phi^+} \frac{e^\alpha(C)+1}{e^\alpha(C)-1}(\alpha, \alpha_i) x_\alpha x_\alpha^- \in Y(\mathfrak{g}),$$

$i = 1, \ldots, n$. *Тогда $Q(C)$ — линейная оболочка элементов $\sigma_i(C)$ и подпространства $\mathfrak{h}\cdot\mathfrak{h} + \mathfrak{h}$.*

Доказательство. Элементы $\sigma_i(C)$ — это с точностью до $\mathfrak{h} + \mathfrak{h}\cdot\mathfrak{h}$ и невырожденного линейного преобразования «старшие части» коэффициентов при u^{-2}

рядов $\tau_i(u,C)$, что легко следует из явного вида коэффициента $R^{(2)}$ универсальной R-матрицы:

$$R^{(2)} = -\sum_{\lambda\in\Phi^+}(x_\alpha^\pm\otimes J(x_\alpha^\mp) - J(x_\alpha^\pm)\otimes x_\alpha^\mp) - \frac{1}{d_i}\sum_{i=1}^n(h_i\otimes J(t_{\omega_i}) - J(h_i)\otimes t_{\omega_i}) + \frac{1}{2}\Omega^2.$$

Проверка представляет собой прямое вычисление, которое сводится к сравнению коэффициентов при $x_\alpha x_\alpha^-$. Эти коэффициенты, в свою очередь, зависят только от соответствующей корню α $\mathfrak{sl}_2$-тройки. $\square$

Следствие 5. *Подалгебра Бете $B(C)$ совпадает с централизатором линейной оболочки элементов $\sigma_i(C)$, $i=1,\dots,n$.*

Автор благодарит своего научного руководителя Л. Г. Рыбникова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

[**1**] C. Wendlandt, Comm. Math. Phys., **363**:1 (2018), 289–332. [**2**] V. Chari, A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995. [**3**] А. Молев, *Янгианы и классические алгебры Ли*, МЦНМО, М., 2009. [**4**] R. Steinberg, *Conjugacy Classes in Algebraic Groups*, Lecture Notes in Math., vol. 366, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1974. [**5**] A. Ilin, L. Rybnikov, Comm. Math. Phys., 2019, `https://doi.org/10.1007/s00220-019-03509-1`; `https://arxiv.org/abs/1810.07308`. [**6**] M. Nazarov, G. Olshanski, Comm. Math. Phys., **178**:2 (1996), 483–506. [**7**] В. Г. Дринфельд, ДАН СССР, **283**:5 (1985), 1060–1064. [**8**] Л. Г. Рыбников, УМН, **60**:2(362) (2005), 173–174.

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва, Россия
e-mail: alex.omsk2@gmail.com

Поступила в редакцию
3 июня 2019 г.
После доработки
10 июня 2019 г.
Принята к публикации
13 июня 2019 г.